Compito di MD del 29 maggio 2014

A.A. 2013/14

Soluzioni

Esercizio 1. a) Determinare le coordinate del vettore $v = (2, 3, -3)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (-1, 1, 1)$.

b) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che ha per matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B}$ la matrice A, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare le coordinate di $f(v)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Dimostrazione. a) Le coordinate di v si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Rappresentiamo il sistema con la matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$. Le mosse elementari di righa non alterano l'insieme delle soluzioni. Con mosse di riga ci riduciamo alla matrice a scalini ridotta $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right)$ e troviamo $x = -11,\ y = 5,\ z = -8$.

b) Rispetto alla base $\mathcal{B}$ il vettore v ha coordinate $(-11, 5, -8)$ (per il primo punto dell'esercizio) e le coordinate di $f(v)$, sempre rispetto alla base $\mathcal{B}$, si ottengono calcolando $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -15 \\ -40 \end{pmatrix}$. Questo vuol dire che $f(v) = -27v_1 - 15v_2 - 40v_3$. Poiché conosciamo già le coordinate di v_1, v_2, v_3 rispetto alla base canonica, per ottenere le coordinate di $f(v)$ rispetto alla base canonica basta sostituire: $f(v) = -27 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 15 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 40 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ -55 \end{pmatrix}$. $\square$

Esercizio 2. Sia $T : \mathbb{Q}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{Q}^3$, l'applicazione lineare definita da $T(ax^3+bx^2+cx+d) = (a+b, c+d, a+b+c+d)$.

a) Determinare una base di $Ker\ T$ e una base di $Imm\ T$.

b) Definire, se possibile, un'applicazione lineare $F : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ tale che $KerT \oplus Imm\ F = \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$.

Dimostrazione. La matrice $[T]$ di T, rispetto alla base $\{x^3, x^2, x, 1\}$ per $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ e rispetto alla base canonica per $\mathbb{Q}^3$, è data da

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le due colonne indipendenti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forniscono una base per l'immagine di T. Per calcolare il nucleo riduciamo a scalini la matrice $[T]$ con mosse elementari di riga ottenendo $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il nucleo di T è dunque dato dai polinomi con $a+b=0$ e $c+d=0$ (come si vede applicando la matrice a scalini al vettore dei coefficienti del polinomio e uguagliando a zero). I coefficienti b, d possono essere scelti liberamente e gli altri coefficienti sono determinati da $a = -b$, $c = -d$. I polinomi nel nucleo sono dunque quelli la cui quadrupla dei coefficienti è della forma $(-b, b, -d, d)$ che possiamo anche scrivere (in colonna) come combinazione lineare $b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una base del nucleo è data dai due polinomi corrispondenti a questi vettori colonna, ovvero $-x^3 + x^2$ e $-x+1$.

b) Per risolvere il secondo punto dell'esercizio cerchiamo innanzitutto un sottospazio V di $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ tale che $\ker(T) \oplus V = \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ e poi cerchiamo una $F : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ la cui immagine sia V.

Avendo fissato le basi, possiamo pensare a $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ come fosse $\mathbb{Q}^4$ associando ad un polinomio la quadrupla dei suoi coefficienti. Nel punto precedente dell'esercizio abbiamo visto che $\ker(T)$ è lo span dei due vettori indipendenti $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (o più precisamente è lo span dei polinomi che hanno queste quadruple come coefficienti). Ci basta allora trovare altri due vettori indipendenti che insieme a questi formino una base di $\mathbb{Q}^4$. Si vede a occhio che una soluzione è data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, che corrispondono ai polinomi x^3 e 1 rispettivamente. Dunque una possibile scelta per V è data da $V = span\{x^3, 1\}$. Per trovare un'applicazione lineare $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ con immagine V basta definire $F(a,b,c) = ax^3 + b$. $\square$

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $F_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base canonica, ha matrice:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Discutere, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la diagonalizzabilità di F_a.

Dimostrazione. Il polinomio caratteristico $p(x)$ è dato dal determinante di

$$\begin{pmatrix} x-a & 0 & 0 \\ -2 & x-1 & a \\ -3 & a & x-1 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando il determinante lungo la prima riga si ottiene

$$p(x) = (x-a)[(x-1)^2 - a^2] = (x-a)(x-(1+a))(x-(1-a)).$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = a,\ \lambda_2 = 1+a,\ \lambda_3 = 1-a$. Studiamo la coincidenza degli autovalori.

Se $a = \frac{1}{2}$ abbiamo $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. In questo caso $p(x) = (x-\frac{1}{2})^2(x-\frac{3}{2})$, da cui si vede che l'autovalore $\frac{3}{2}$ ha molteplicità algebrica 1 e l'autovalore $\frac{1}{2}$ ha molteplicità algebrica 2. Per studiare la diagonalizzabilità dobbiamo controllare se tali molteplicità coincidano con quelle geometriche (che in generale sono minori o uguali di quelle algebriche ma sempre maggiori o uguali ad 1). L'unico problema lo può causare l'autovalore con molteplicità 2 perché quando la molteplicità algebrica è 1 coincide necessariamente con quella geometrica. Dobbiamo dunque calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore $\frac{1}{2}$, ovvero la dimensione dell'autospazio $V_{\frac{1}{2}} = \{v \in \mathbb{R}^3 : F_{\frac{1}{2}}(v) = \frac{1}{2}v\} = \ker(\frac{1}{2}I - F_{\frac{1}{2}})$. La matrice associata a $\frac{1}{2}I - F_{\frac{1}{2}}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il suo rango (= dimensione dell'immagine) è 2 e dunque la dimensione di $V_{\frac{1}{2}}$ (ovvero la dimensione del nucleo) è $3-2=1$. Dunque per $a = \frac{1}{2}$ c'è un autovalore con molteplicità algebrica diversa dalla molteplicità geometrica e pertanto $F_{\frac{1}{2}}$ non è diagonalizzabile.

Se $a = 0$ abbiamo $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ e $p(x) = x(x-1)^2$. In questo caso gli autovalori sono 0 ed 1. L'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 1 mentre l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 2 e dobbiamo calcolarne la molteplicità geometrica. Ragionando come prima calcoliamo il rango della matrice associata a $1I - F_0$, ovvero della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente il rango è 1 e quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è $3-1 = 2 = \dim(V_1)$. Siccome essa coincide con la molteplicità algebrica, F_0 è diagonalizzabile.

Per finire supponiamo $a \neq 0$ e $a \neq \frac{1}{2}$. In questo caso i tre autovalori sono distinti e pertanto F_a è diagonalizzabile. $\square$